Раздел 2. Тема 5. Занятие 3.

1° Если в $\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ подинтегральное выражение образует полный дифференциал, т.е. $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du$, то в случае стандартной параллелепипедной области V, функцию u можно найти по формуле:

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P\,dx^{(x,y,z)} + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz + C,$$

где (x_0, y_0, z_0) – фиксированная точка области V и $C = Const$.

2°. Если $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ – непрерывно дифференцируемые функции и C – простой замкнутый кусочно гладкий контур, ограничивающий конечную кусочно гладкую двусторонною поверхность S, то имеет место формула Стокса:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S, направленной в ту сторону, относительно которой обход контура C совершается против хода часовой стрелки.

Класс: №№ 4284, 4286, 4290, 4367, 4370, 4373, 4374

№4284 Найти $I = \int\limits_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)} x\,dx + y^2dy - z^3dz$.

$P = x,\ Q = y^2,\ R = -z^3$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial z}$.

$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} x\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} y^2dy - \int\limits_{z_0}^{z} z^3dz + C_* = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{z^4}{4} + C$.

$I = u(2;3;-4) - u(1;1;1) = -53 - \frac{7}{12} = -53\frac{7}{12}$.

№4286 Найти $I = \int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где $(x_1,y_1,z_1) \in \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=a^2\}$

и $(x_2;y_2;z_2) \in \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=b^2\}$, $a>0, b>0$.

$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ R = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$

$\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow$

$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{x_0^2+y^2+z^2}} + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}} + C_* =$

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C \Rightarrow$

$I = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1) = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} - \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} = b - a$.

№4290 Найти первообразную u, если $du = (x^2-2yz)dx + (y^2-2xz)dy + (z^2-2xy)dz$.

$P = x^2-2yz,\ Q = y^2-2xz,\ R = z^2-2xy$.

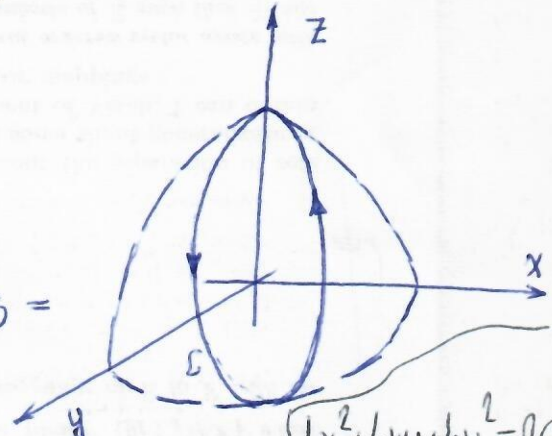
$\frac{\partial P}{\partial y} = -2z = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -2x = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = -2y = \frac{\partial P}{\partial z}$.

$$u=\int_{x_0}^{x}(x^2-2yz)\,dx+\int_{y_0}^{y}(y^2-2x_0z)\,dy+\int_{z_0}^{z}(z^2-2x_0y_0)\,dz+C_*=$$

$$=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.\Rightarrow u(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C.$$

№4367. Вычислить $I=\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$, где C – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX.

$$\left.\begin{aligned}&P=y,\ Q=z,\ R=x\\&\bar{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y&z&x\end{vmatrix}dS=$$

$$=\iint_S\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\z&x\end{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\y&x\end{vmatrix}+\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\y&z\end{vmatrix}\right\}dS=$$

$$=-\sqrt{3}\iint_S dS=-3\iint_\Omega dx\,dy=(*)$$

$$z=-x-y\Rightarrow z'_x=-1,\ z'_y=-1\Rightarrow dS=\sqrt{3}\,dx\,dy$$

Область Ω ограничена кривой $2x^2+2y^2+2xy=a^2$

$$4x^2+4xy+4y^2=2a^2$$
$$(2x+y)^2+(\sqrt{3}y)^2=2a^2$$
$$u=2x+y,\ v=\sqrt{3}y\Rightarrow$$
$$x=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2\sqrt{3}}v,\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}v\Rightarrow I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow$$
$$(*)=-3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\iint_{\Omega'}du\,dv=$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\pi a^2=-\sqrt{3}\pi a^2$$

$$(*)=\left|\begin{aligned}&x=r\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi\\&y=r\sin\varphi,\quad 0\le r\le\frac{a}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}\end{aligned}\right|=-3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2+\sin 2\varphi}}}r\,dr=-6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{2+\sin 2\varphi}=$$

$$=\left|u=\operatorname{tg}\varphi\right|=-3a^2\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u+u^2}=\left|w=u+\frac{1}{2}\right|=-3a^2\int_{1/2}^{+\infty}\frac{dw}{w^2+\frac{3}{4}}=\left|v=\frac{2w}{\sqrt{3}}\right|=-2a^2\sqrt{3}\int_{1/\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{dv}{1+v^2}=\boxed{-\frac{2\pi a^2}{\sqrt{3}}.\ I=-\frac{2\pi a^2}{\sqrt{3}}.}$$

№4370 Вычислить $I=\int_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, где C – эллипс $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$, $0\le t\le\pi$, пробегаемый в направлении возрастания параметра t.

$$P=y+z,\ Q=z+x,\ R=x+y\Rightarrow$$

$$I=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha&\cos\beta&\cos\gamma\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\y+z&z+x&x+y\end{vmatrix}dS=$$

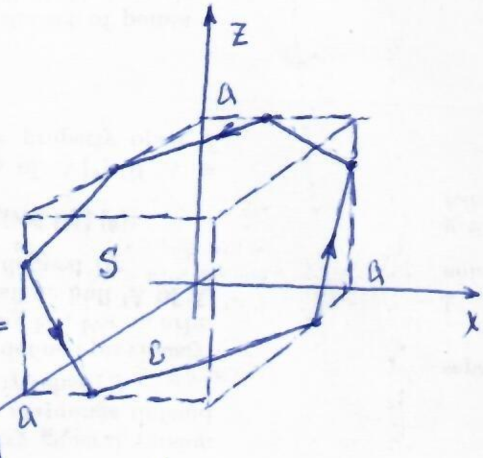
$$= \iint_S \left\{ \cos\alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z+x & x+y \end{vmatrix} - \cos\beta \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+y \end{vmatrix} + \cos\gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y+z & z+x \end{vmatrix} \right\} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \cos\alpha\,(1-1) - \cos\beta\,(1-1) + \cos\gamma\,(1-1) \right\} dS = \iint_S 0\, dS \equiv 0 \Rightarrow$$

$$I \equiv 0$$

Здесь S – поверхность, ограниченная контуром C, а $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – направляющие косинусы нормали к S.

№4373 Вычислить $I = \int_C (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz$, где C – сечение поверхности куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ плоскостью $x+y+z = \frac{3}{2}a$, пробегаемое против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX



$P = y^2 - z^2$, $Q = z^2 - x^2$, $R = x^2 - y^2$,

$\bar{n} = \left(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}\right)$

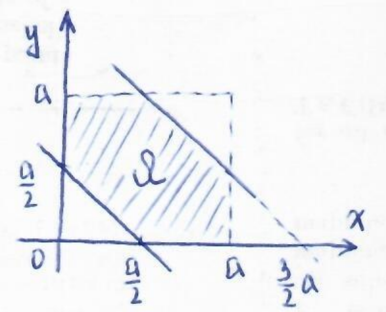
$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \frac{1}{\sqrt3} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt3} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt3} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \right\} dS =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt3} \iint_S (x+y+z)\, dS = -\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{\sqrt3}} \cdot \frac{3a}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\sqrt3} \iint_\Omega dxdy = -6a \iint_\Omega dxdy = (*)$$

$$z = \frac{3}{2}a - x - y \Rightarrow z'_x = -1,\ z'_y = -1 \Rightarrow dS = \sqrt3\, dxdy$$

$$S_\Omega = a^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \iint_\Omega dxdy = S_\Omega = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$



$$I = -6a \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{9a^3}{2} \Rightarrow I = -\frac{9a^3}{2}.$$

№4374 $I=\oint\limits_C y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$, где C: $x = a\cos t$

$y = a\cos 2t$

$z = a\cos 3t$

При изменении $t\in[0;\pi]$ точка $M(x,y,z)$ пробегает часть кривой γ от точки $M_0(a,a,a)$ до точки $M_1(-a,a,-a)$, а при $t\in[\pi;2\pi]$ точка M пробегает ту же часть кривой γ в противоположном направлении — от точки M_1 до точки M_0. Значит, точки замкнутой кривой γ взаимно накладываются, и эта кривая не ограничивает никакой поверхности. Следовательно, $I=0$.

Дома: №№ 4285, 4289, 4291, 4368, 4371, 4372.

№4285 Найти $I = \int\limits_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

$$P = yz,\ Q = xz,\ R = xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = z = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = x = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = y = \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow$$

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} yz\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} x_0 z\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} x_0 y_0\,dz + C_* = xyz + C. \Rightarrow$$

$$I = u(6;1;1) - u(1;2;3) = 6 - 6 = 0 \Rightarrow I = 0.$$

№4289 Найти $I = \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\,dx + y\,dy + z\,dz)$, где $f(\cdot) \in C(E^3)$.

$$P = xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\ Q = yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),\ R = zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xyf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{yzf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{xzf'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow$$

$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} yf(\sqrt{x_0^2+y^2+z^2})\,dy +$$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} zf(\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2})\,dz + C_* =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,d(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{2}\int\limits_{y_0}^{y} f(\sqrt{x_0^2+y^2+z^2})\,d(x_0^2+y^2+z^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z} f(\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2})\,d(x_0^2+y_0^2+z^2) + C_* = \left| \begin{matrix} u_2 = x_0^2+y^2+z^2 \\ u_1 = x^2+y^2+z^2 \end{matrix},\ u_3 = x_0^2+y_0^2+z^2 \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x_0^2+y^2+z^2}^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{u_1})\,du_1 + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0^2+y_0^2+z^2}^{x_0^2+y^2+z^2} f(\sqrt{u_2})\,du_2 + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0^2+y_0^2+z_0^2}^{x_0^2+y_0^2+z^2} f(\sqrt{u_3})\,du_3 + C_* = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0^2+y_0^2+z_0^2}^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{u})\,du + C_* =$$

$$= \left| \sqrt{u} = w,\ du = 2w\,dw \right| = \int\limits_{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} w f(w)\,dw + C_* . \Rightarrow$$

$$I = \int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} du = u(x_2,y_2,z_2) - u(x_1,y_1,z_1) = \int\limits_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} w f(w)\,dw .$$

№4291 Найти первообразную, если $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz$.

$$P = 1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \quad Q = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, \quad R = -\frac{xy}{z^2}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{x}{z^2} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y}{z^2} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

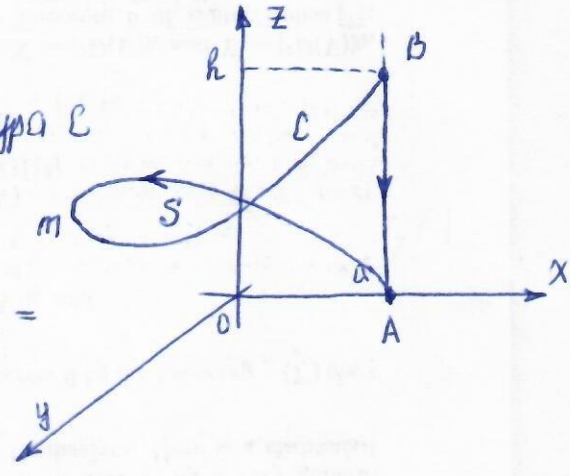
$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x}\left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy + \int\limits_{z_0}^{z}\left(-\frac{xy}{z^2}\right)dz + C_* =$$

$$= \left(x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}\right)\Big|_{x_0}^{x} + \left(\frac{x_0 y}{z} - \frac{x_0}{y}\right)\Big|_{y_0}^{y} + \frac{x_0 y_0}{z}\Big|_{z_0}^{z} + C_* = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$$

$$u(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C.$$

№4368 Вычислить $I = \int\limits_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, где AmB отрезок линии $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi$ от $A(a,0,0)$ до $B(a,0,h)$.

$P = x^2 - yz,\ Q = y^2 - xz,\ R = z^2 - xy.$



Дополним AmB до замкнутого контура C отрезком BA $\Rightarrow$

$$I = \oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int\limits_{\overline{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{\overline{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz .$$

$$\int\limits_{\overline{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \left| \begin{array}{ll} x = a & x'_t = 0 \\ y = 0,\quad 0 \le t \le h & y'_t = 0 \\ z = t & z'_t = 1 \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{h} t^2\,dt = \frac{h^3}{3}$$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} dS =$$

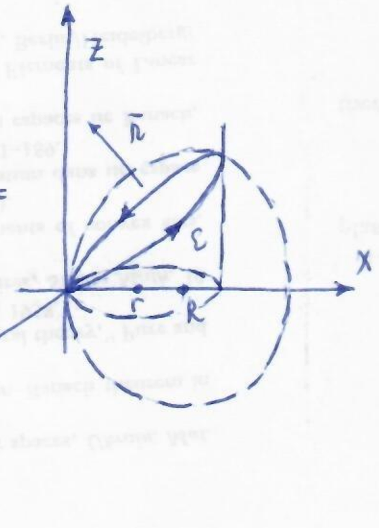
$$= \iint_S \left\{ \cos\alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix} - \cos\beta \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & z^2 - xy \end{vmatrix} + \cos\gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 - yz & y^2 - xz \end{vmatrix} \right\} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \cos\alpha(-x + x) - \cos\beta(-y + y) + \cos\gamma(-z + z) \right\} dS = \iint_S 0\, dS \equiv 0$$

Здесь $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S.

$$I = 0 + \frac{h^3}{3} = \frac{h^3}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{3}h^3.$$

№4372. Вычислить $I = \oint_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, где C — кривая $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$, $x^2+y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, $z \geq 0$, пробегаемая так, что ограниченная ею на внешней стороне сферы $x^2+y^2+z^2 = 2Rx$ наименьшая область остается слева.



$P = y^2 + z^2$, $Q = x^2 + z^2$, $R = x^2 + y^2$

$$I = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \cos\beta\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \cos\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right\} dS =$$

$$= 2\iint_S \left\{ \cos\alpha(y - z) + \cos\beta(z - x) + \cos\gamma(x - y) \right\} dS = (*)$$

$z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2} \Rightarrow$ направляющие косинусы вектора нормали:

$$\cos\alpha = \frac{z'_x}{\pm\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\beta = \frac{z'_y}{\pm\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

Поскольку $(\bar{n}, \bar{k}) > 0 \Rightarrow \cos\gamma > 0 \Rightarrow$

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_y + z'^2_x}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$$

$$z'_x = \frac{R-x}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = -\frac{R-x}{R}, \quad \cos\beta = \frac{y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}{R} \Rightarrow$$

$$(*) = 2\iint_{\sigma}\left\{-(R-x)\left(y-\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\right)+y\left(\sqrt{2Rx-x^2-y^2}-x\right)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\,(x-y)\right\}\frac{dx\,dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}} = 2R\iint_{\sigma}\left(1-\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\right)dx\,dy =$$

$$= \left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{matrix}, \ \begin{matrix} -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le 2r\cos\varphi \end{matrix}\right| = 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\left(\rho-\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2R\rho\cos\varphi-\rho^2}}\right)d\rho =$$

$$= I_1 + I_2 \Rightarrow$$

$$I_1 = 2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\rho\,d\rho = 4Rr^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = 2Rr^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = 2\pi Rr^2.$$

$$I_2 = -2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2R\rho\cos\varphi-\rho^2}}d\rho = -2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2R\rho\cos\varphi-\rho^2}}d\rho -$$

$$-2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2R\rho\cos\varphi-\rho^2}}d\rho = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2R\rho\cos\varphi-\rho^2}}d\rho -$$

$$-2R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2r\cos\varphi}\frac{\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{2R\rho\cos\varphi-\rho^2}}d\rho = 0 \Rightarrow$$

см. продолжение!

$$I = I_1 + I_2 = 2\pi Rr^2 + 0 = 2\pi Rr^2.$$

№4371. Найти $I = \oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где C — эллипс $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$, $a>0, h>0$, пробегаемый против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX.

$$P = y-z, \quad Q = z-x, \quad R = x-y.$$

(4372) Продолжение:

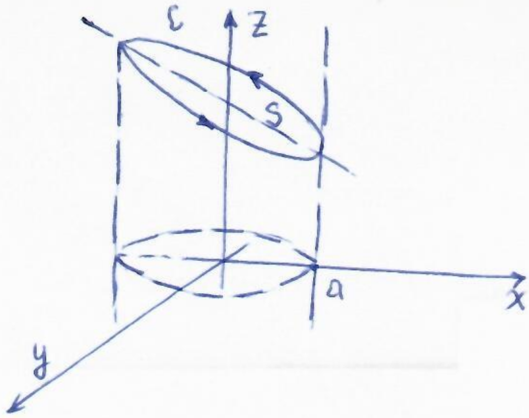
$$2R\iint\limits_{\sigma}\left(1-\frac{y}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\right)dxdy =$$

σ: $x^2+y^2=2rx$ или $(x-r)^2+y^2=r^2$

$$= 2R\iint\limits_{\sigma}dxdy-2R\iint\limits_{\sigma}\frac{y\,dxdy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=2R\cdot\pi r^2-$$

$$-2R\int\limits_0^{2r}dx\int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}\frac{y\,dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=2\pi Rr^2+R\int\limits_0^{2r}dx\cdot\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\,\Bigg|_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}}=$$

$$=2\pi Rr^2+0=\underline{\underline{2\pi Rr^2}}$$



$$\bar{n}^* = \left(\frac{1}{a}; 0; \frac{1}{h}\right)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{a^2+h^2}{a^2h^2} \Rightarrow$$

$$n_x = \frac{ah}{a\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$n_z = \frac{ah}{h\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \Rightarrow \bar{n} = \left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$$

$$z = h - \frac{hx}{a} \Rightarrow z'_x = -\frac{h}{a},\ z_y = 0 \Rightarrow dS = \sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\,dxdy = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,dxdy$$

$$I = \oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-x & x-y \end{vmatrix} + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y-z & z-x \end{vmatrix} \right\} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}(-1-1) + \frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}(-1-1) \right\} dS = -2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}} \iint_S dS =$$

$$= -2\frac{a+h}{\cancel{\sqrt{a^2+h^2}}} \iint_\sigma \frac{\cancel{\sqrt{a^2+h^2}}}{a}\,dxdy = -2(a+h)\cdot\frac{\pi a^2}{a} = -2\pi a(a+h). \Rightarrow$$

$$I = -2\pi a(a+h).$$